Вариант 1

№ зад	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
отв	3328	4	3	14	3	10	16	1	30	128	168	5	2	2	9	25	288	4	0,5	260

21. Решение. Заметим, что выражение $-x^2-25$ отрицательно при любом x, потому на это выражение можно сократить, поскольку оно отрицательно знак неравенства сменится на противоположный:

$$x^2(-x^2-25)\le 25(-x^2-25)\Leftrightarrow x^2\ge 25\Leftrightarrow x^2-25\ge 0\Leftrightarrow (x-5)(x+5)\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le -5, \\ x\ge 5. \end{array}\right.$$

Таким образом, ответ $(-\infty;\ -5]\cup[5;\ \infty)$.

Ответ: $(-\infty;\ -5]\cup[5;\ \infty)$.

22. Решение. Пусть S км — расстояние, на которое от пристани отплыл рыболов. Зная, что скорость течения реки — 1 км/ч, а скорость лодки — 5 км/ч, найдём, что время, за которое он проплыл туда и обратно, составляет $\frac{S}{5-1}+\frac{S}{5+1}$ ч. Учитывая, что он был на стоянке 2 часа и вернулся через 6 часов после отплытия можно составить уравнение:

$$\frac{S}{4}+\frac{S}{6}+2=6.$$

Отсюда S = 9,6 км.

Ответ: 9,6 км.

23. Решение. Найдём абсциссы точек пересечения: $x^2+p=-4x-5\Leftrightarrow x^2+4x+p+5=0.$

Графики функций, будут иметь ровно одну точку пересечения, если это уравнение имеет ровно одно решение. То есть, если дискриминант этого квадратного уравнения будет равен нулю.

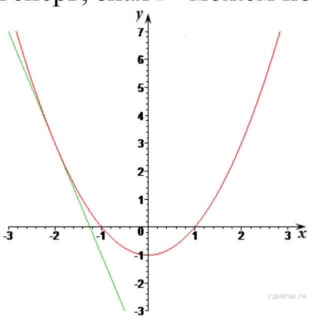
$16-4(p+5)=0\Leftrightarrow p=-1.$ Подставив параметр p в уравнение, найдём x координату точки пересечения этих функций:

$x^2+4x+4=0\Leftrightarrow (x+2)^2=0\Leftrightarrow x=-2.$

Координата y находится оттуда же путём подстановки координаты x в любое из уравнений, например, во второе:

$y=-4\cdot(-2)-5=3.$

Теперь, зная p, можем построить графики обеих функций (см. рисунок)



.

Ответ: (−2; 3).

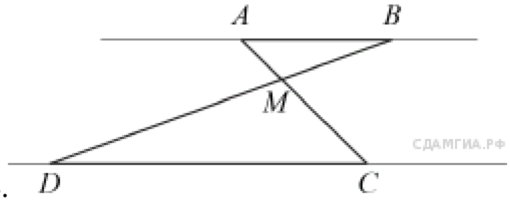
24. Решение.

Углы DCM и BAM равны как накрест лежащие, углы DMC и BMA равны как вертикальные, следовательно, треугольники DMC и BMA подобны по двум углам.

Значит, $\frac{AM}{MC}=\frac{AB}{CD}=\frac{16}{24}=\frac{2}{3}.$ Следовательно,

$$AC=AM+MC=\frac{2}{3}MC+MC=\frac{5}{3}MC.$$

Откуда $MC=\frac{3}{4}AC=15.$

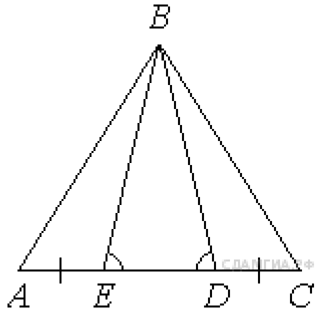


Ответ: 15.

25. Решение.

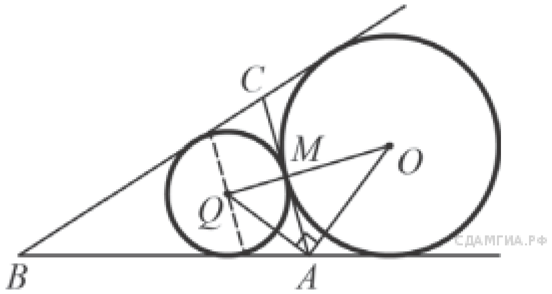
Углы BED и BDE равны, поэтому треугольник BED — равнобедренный, то есть $BE = ED$Углы AED и EDC — развёрнутые, поэтому:
$\angle AEB = 180° - \angle BED = 180° - \angle BDE = \angle BDC.$

Рассмотрим треугольники ABE и BDC, $AE = DC$, $BE = BD$, $\angle AEB = \angle BDC$, следовательно, эти треугольники равны, а значит, $AB = BC$, то есть треугольник ABC — равнобедренный.



26. Решение. Данная окружность касается стороны AC в её середине M и продолжений сторон BA и BC треугольника ABC.

Пусть O — центр этой окружности, а Q — центр окружности, вписанный в треугольник ABC. Угол OAQ — прямой как угол между биссектрисами смежных углов. Треугольник OAQ — прямоугольный, AM — его высота. Из этого треугольника находим, что $AM^2 = MQ \cdot MO$. Следовательно, $QM = \dfrac{AM^2}{OM} = \dfrac{10}{3}$.



Ответ: $\dfrac{10}{3}$.

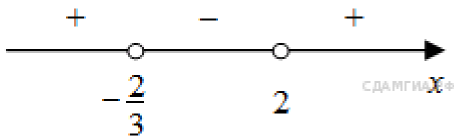
Вариант 2

№ зад	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
отв	0,000196	1	1	-13	3	-972	8	2	48	39	20	4	3	2	9	80	330	3	0,85	0,6

21. Решение.

Умножим на 6, приведём подобные слагаемые и разложим на множители:

$$\frac{x^2}{2} < \frac{2x+2}{3} \Leftrightarrow 3x^2 - 4x - 4 < 0 \Leftrightarrow 3\left(x + \frac{2}{3}\right) \cdot (x-2) < 0.$$



Произведение двух сомножителей будет меньше нуля, если сомножители имеют разный знак (см. рисунок). Таким образом, получаем ответ:

$$-\frac{2}{3} < x < 2.$$

Ответ: $\left(-\frac{2}{3};\ 2\right)$.

22.Решение. Плот прошёл 44 км, значит, он плыл 11 часов, из которых лодка находилась в пути 10 часов. Пусть скорость лодки в неподвижной воде равна *v* км/ч, тогда

$$\frac{75}{v+4} + \frac{75}{v-4} = 10 \Leftrightarrow 75v - 300 + 75v + 300 = 10v^2 - 160 \Leftrightarrow v^2 - 15v - 16 = 0,$$

откуда $v = 16$.

Ответ: 16.

23. Решение.

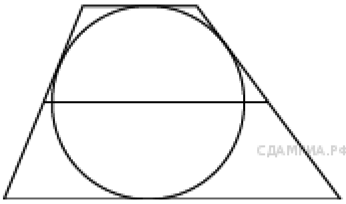
Одна из возможных форм записи уравнения параболы в общем виде выглядит так: $y = ax^2 + bx + c$. Координата x вершины параболы находится по формуле $x_в = -\frac{b}{2a}$. Координату y вершины параболы найдётся подстановкой $x_в$ в уравнение параболы. Таким образом, задача сводится к нахождению коэффициентов a, b и c. Подставив координаты точек, через которые проходит парабола, в уравнение параболы и получим систему из трёх уравнений:

Найдём координаты вершины: $\begin{cases} c = 2, \\ 25a - 5b + c = -3, \\ a + b + c = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2, \\ 25a - 5(7-a) + 2 = -3, \\ b = 7 - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2, \\ b = 6, \\ a = 1. \end{cases}$

$$x_в = -\frac{6}{2} = -3,$$
$$y_в = 9 + 6 \cdot (-3) + 2 = -7.$$

Ответ: $(-3; -7)$.

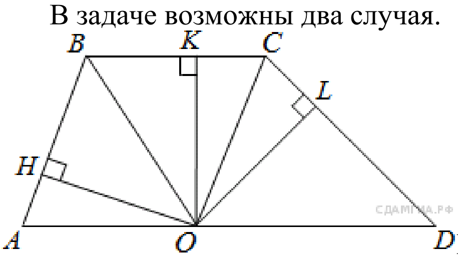
24. Решение.



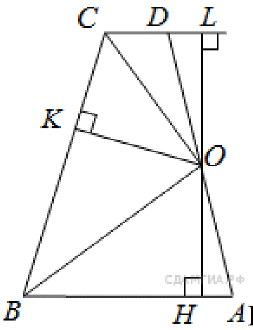
Поскольку в трапецию вписана окружность, суммы её противоположных сторон равны. Таким образом, сумма оснований трапеции равна 22, а средняя линия равна полусумме оснований, то есть 11.

25. Решение.

В задаче возможны два случая.

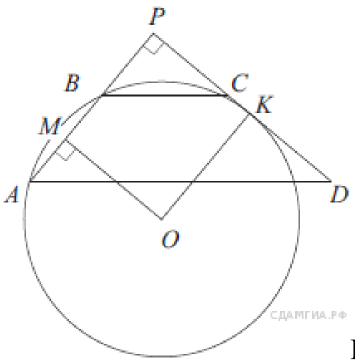


Первый случай, AD — одно из оснований. Проведём построения и введём обозначения как указано на рисунке. Рассмотрим треугольники OBH и BOK Рассмотрим треугольники OBH и OBK, они прямоугольные, углы HBO и KBO равны, OB — общая, следовательно, треугольники равны. Откуда $OH = OK$. Аналогично из треугольников KOC и COL получаем, что $OK = OL$. Таким образом, $OH = OK = OL$.



Второй случай, AD — одна из боковых сторон. Несмотря на другую геометрическую конфигурацию, доказательство полностью повторяет доказательство для первого случая.

26. Решение.



Продлим боковые стороны трапеции до пересечения в точке P (см. рис.). Из условия ясно, что $\angle APD = 90°$. Из подобия треугольников APD и BPC получаем, что $\frac{BP}{AP} = \frac{BC}{AD}$, то есть $\frac{BP}{BP+9} = \frac{15}{45}$, откуда $BP = 4{,}5$.

Пусть окружность касается прямой CD в точке K, а O — её центр. Опустим из точки O перпендикуляр OM на хорду AB. Точка M — середина AB . Так как $OMPK$ — прямоугольник, искомый радиус

$$OK = MP = BP + \frac{1}{2}AB = 4{,}5 + 4{,}5 = 9.$$

Ответ: 9.

Вариант 3

№ зад	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
отв	14	1	3	6,3	4	-13	-10,5	3	106	24	15	4	13	2	751	850	7	3	0,94	70

21.Решение.

Из первого уравнения системы находим $y=-x-7$. Подставив полученное выражение во второе уравнение системы, получаем

$$x^2+14x+49+x^2=25;\ x^2+7x+12=0,$$

откуда находим $x=-4,\ x=-3$. Таким образом, решение исходной системы $(-4;\ -3),\ (-3;\ -4)$.

Ответ: $(-4;\ -3),\ (-3;\ -4)$

22. Решение. Пусть S — расстояние между *A* и *B*, x км/ч — скорость первого автомобилиста, тогда $x-11$ км/ч — скорость второго автомобилиста на первой половине пути,. Первый автомобилист проделал весь путь за $\frac{S}{x}$ часов, а второй за $\frac{S}{2(x-11)}+\frac{S}{2\cdot 66}$ часов. Время, за которое они проехали весь путь от *A* до *B* одинаково, следовательно, можно составить уравнение:

$$\frac{S}{x}=\frac{S}{2(x-11)}+\frac{S}{2\cdot 66}\Leftrightarrow\frac{1}{x}=\frac{66+x-11}{132(x-11)}\Leftrightarrow x^2+55x=132x-11\cdot 132\Leftrightarrow$$

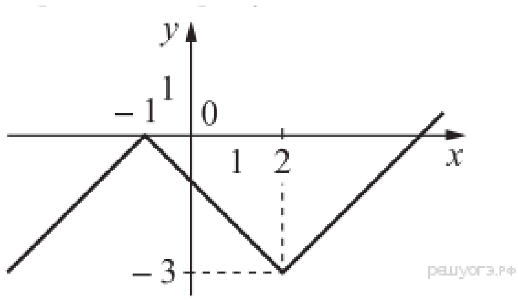
$$x^2-77x+11\cdot 132=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=33,\\x=44.\end{array}\right.$$

По условию задачи скорость первого автомобилиста больше 40 км/ч, следовательно, скорость первого автомобилиста равна 44 км/ч.

Ответ: 44.

23. Решение.

Раскрывая модули, получаем, что график функции совпадает с прямой $y=x+1$ при $x<-1$, совпадает с прямой $y=-m-1$ при $-1\le x\le 2$ и совпадает с прямой $y=x-5$ при $x>2$.
График изображен на рисунке.

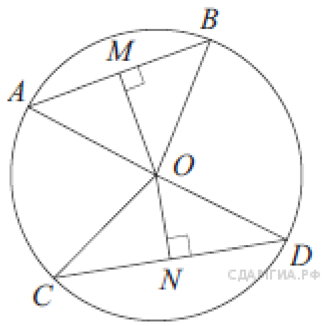


Прямая $y=m$ имеет с графиком данной функции ровно две общие точки при $m=-3$ и $m=0$.
Ответ: $m=-3,\ m=0$.

24.Решение.

Пусть $OM = 16$ и ON — перпендикуляры к хордам AB и CD соответственно. Треугольники AOB и COD равнобедренные, значит, $AM = MB$ и $CN = ND$.
Тогда в прямоугольном треугольнике MOB имеем

$$OB = \sqrt{OM^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = 20.$$



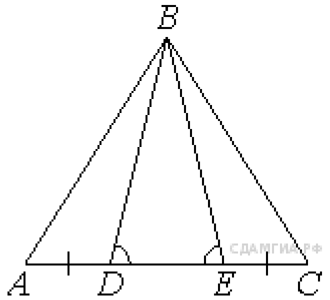
В прямоугольном треугольнике CON гипотенуза $CO = OB = 20$, значит

$$ON = \sqrt{OC^2 + \left(\frac{CD}{2}\right)^2} = 12.$$

Ответ: 12.

25.Решение.

Треугольник DBE — равнобедренный, по признаку равнобедренного треугольника, следовательно, $BD = BE$. Углы ADE и DEC — развёрнутые, поэтому:
$\angle ADB = 180^\circ - \angle BDE = 180^\circ - \angle BED = \angle BEC.$



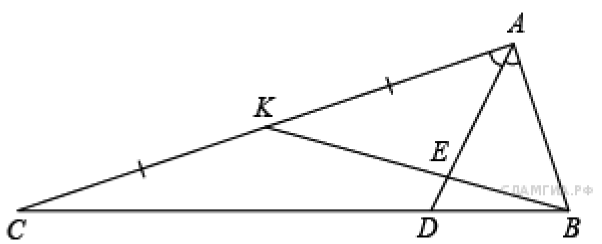
Рассмотрим треугольники ABD и BEC, $AD = EC$, $BD = BE$, $\angle ADB = \angle BEC$, следовательно, эти треугольники равны, а значит, $AB = BC$, то есть треугольник ABC — равнобедренный.

26. Решение. Пусть AK=KC=3x, тогда AB=2x, так как $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD} = \frac{1}{3}$ по свойству биссектрисы. Значит, $\frac{BE}{KE} = \frac{2}{3}$. Пусть S - площадь треугольника ABC, тогда

$$S_{ACD} = \frac{CD}{CB} \cdot S = \frac{3}{4}S;$$

$$S_{AKE} = \frac{KE}{BK} \cdot S_{ABK} = \frac{KE}{BK} \cdot \frac{AK}{AC} \cdot S = \frac{3S}{10}.$$

Таким образом, $S_{EDKC} = S_{ACD} - S_{AKE} = \frac{3}{4}S - \frac{3S}{10} = \frac{9}{20}S = 36.$



Ответ: 36.

Вариант 4

№ зад	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
отв	-2	3	3	-9;2	432	467	1,5	2	70	17,5	12	40	1	2	4	12,25	15	15	0,04	13

21. Решение.

$(x-1)(x^2+4x+4)=4(x+2)$,

$x^3+4x^2+4x-x^2-4x-4-4x-8=0$

$x^3+3x^2-4x-12=0$

$x^2(x+3)-4(x+3)=0$

$(x+3)(x^2-4)=0$

$x=-3;\pm 2$

Ответ: -3;-2;2.

22. Решение.

Пусть масса первого сплава x кг. Тогда масса второго сплава $(x + 4)$ кг, а третьего — $(2x + 4)$ кг. В первом сплаве содержится $0,05x$ кг меди, а во втором — $0,11(x + 4)$ кг. Поскольку в третьем сплаве содержится $0,1(2x + 4)$ кг меди, составим и решим уравнение:

$$0,05x+0,11(x+4)=0,1(2x+4)\Leftrightarrow 0,04x=0,04,$$

Откуда x=1

Масса третьего сплава равна 2*1+4=6 кг.

Ответ:6 кг.

23.Решение.

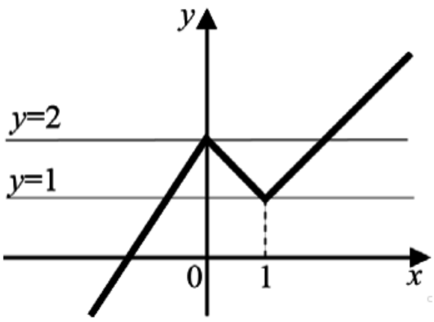


График функции состоит из двух лучей и отрезка.

На рисунке видно, что график имеет ровно две общие точки с горизонтальными прямыми $y=2$ и $y=1$.

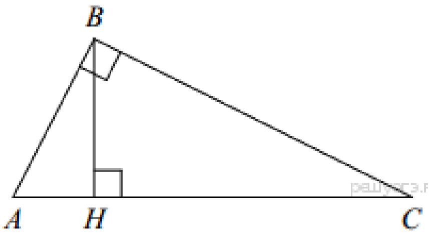
Ответ: 2; 1.

24.Решение

Поскольку BH — высота треугольника ABC, прямоугольные треугольники ABC и AHB подобны.

Следовательно, $\frac{AB}{AC} = \frac{AH}{AB}$, откуда $AB = \sqrt{AC \cdot AH} = 20.$

Ответ: 20.

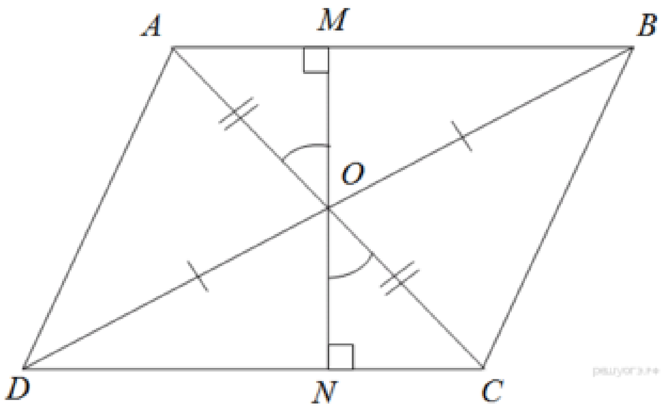


25. Решение.

Проведём высоту MN так, чтобы она проходила через точку K. Углы AOM и NOC равны друг другу как вертикальные. Вспомним также, что диагонали делятся точкой пересечения пополам, следовательно, $AO = OC$. Рассмотрим треугольники AOM и NOC, они прямоугольные, имеют равные углы и равные гипотенузы, следовательно эти треугольники равны, а значит равны отрезки MO и ON. Таким образом, $MO = ON = \frac{1}{2}MN.$

Площадь параллелограмм равна $S_{ABCD} = AB \cdot MN$, а площадь треугольника AOB:

$$S_{AOB} = \frac{1}{2}AB \cdot OM = \frac{1}{2}AB \cdot \frac{1}{2}MN = \frac{S_{ABCD}}{4}.$$



26. Решение.

Данная окружность касается стороны AC в её середине M и продолжений сторон BA и BC треугольника ABC.

Пусть O — центр этой окружности, а Q — центр окружности, вписанный в треугольник ABC. Угол OAQ — прямой как угол между биссектрисами смежных углов. Треугольник OAQ — прямоугольный, AM — его высота. Из этого треугольника находим, что $AM^2 = MQ \cdot MO$. Следовательно, $QM = \frac{AM^2}{OM} = \frac{10}{3}.$

Ответ: $\frac{10}{3}.$